OSCILACIONES

MAS

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -x\omega^2$$

$$tg(\omega) = \frac{v_0}{x_0\omega} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad A = \sqrt{x_0^{\,2} + \frac{v_0^{\,2}}{\omega^2}}$$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Sistema masa-resorte

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \varphi\right) \quad F_{elast} = -kx = ma \Rightarrow a = -\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 x$$

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad k = m\omega^2$$

$$k_1 \sim k_2 \sim m \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\ ;\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$$

$$k_1 \sim m \sim k_2 \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2\ ;\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

Energía

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$U_{px} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi) \qquad E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}k\left(x_f^{\,2} - x_0^{\,2}\right) \qquad \Delta E_{pg} = mg\left(h_f - h_0\right)$$

$$E_{T+RES} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{6}m_{res}v^2\ ;\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_{res}}}$$

Péndulo Simple

$$U = mgL(1-\cos\theta)\ ;\ \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\ ;\ T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(0)}{m}}\ ;\ F \approx mg\theta \approx mg\frac{x}{L} = \left.\frac{mg}{L}\right|_{CTE} x$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\ ;\ S = \theta L : arco\ ;\ v(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Oscilaciones amortiguadas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \rightarrow \text{ED. Mov. Amort.}$$

$$F_{tot} = F_{elas} + F_{roz} = -kx - bv = ma$$

Sol. de la ED: amort subcrítico, crítico, supercrítico

$$\gamma < \omega_0 \rightarrow x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_D t - \varphi)\ ;\ \omega_D = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}$$

$$\gamma = \omega_0 \rightarrow x(t) = Ae^{-\gamma t} \qquad \gamma > \omega_0 \rightarrow x(t) = Ae^{-\gamma t}$$

$$A = A_0e^{-\gamma t}\ ;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ \gamma = \frac{b}{2m}\ ;\ [b/m] = s^{-1};[b] = Kg/s$$

Oscilaciones forzadas

$$F_{ext} = F_0\cos\omega_E t \qquad F_e = -kx \qquad F_r = -bv$$

$$F_{tot} = \sum F = ma \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos\omega_E t$$

Sol. = $\sum$ 2 sols : 1º sol gral ED homog: $Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$

2º sol particular ED no homog: $x = A^*\cos(\omega_E t - \varphi^*)$

$$A^* = \frac{F_o}{\sqrt{m^2(\omega_0^{\,2} - \omega_E^{\,2})^2 + b^2\omega_E^{\,2}}} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi^* = \frac{b\omega_E}{(\omega_0^{\,2} - \omega_E^{\,2})m}; \qquad \text{desde } t = \frac{5}{\gamma}\text{, sólo 2ª sol}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{sen}\,\theta &\cong \theta\\ 1-\cos\theta &\cong \frac{\theta^2}{2}\end{aligned}\right\}\theta\downarrow\downarrow$$

Resonancias

$$A^*_{\max} = \frac{F_0}{\sqrt{b^2\omega_0^{\,2} - \frac{b^4}{4m^2}}}\ ;\ A_0 = \frac{F_0}{b\omega_0}\ [\omega_0 \approx \omega_e]$$

Potencia

$$p = Fv \rightarrow \begin{cases}P_E = F_E v = -F_0A^*\omega_E\cos\omega_E t\,\mathrm{sen}(\omega_E t - \varphi^*)\\ P_{roz} = F_{roz}v = -bA^{*2}\omega_E^{\,2}\mathrm{sen}^2(\omega_E t - \varphi^*)\end{cases}$$

$$E_{E,ciclo} = \frac{F_0A^*\omega_E T\,\mathrm{sen}\varphi^*}{2} \Rightarrow P_E = \frac{F_0A^*\omega_E\,\mathrm{sen}\varphi^*}{2}$$

$$E_{roz,ciclo} = \frac{-bA^{*2}\omega_E T}{2} \Rightarrow P_{roz} = \frac{-bA^{*2}\omega_E}{2}\ ;\ P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

ONDAS MECANICAS

1D

$$\Psi(x,t) = f(x - ct) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

c : vel. de propag. de la onda; signo : sentido $\rightarrow$ - derecha, + izquierda

Ondas armónicas progresivas

$$\Psi(x,t) = A\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)\ ;\ \frac{2\pi v}{\lambda} = \omega\ ;\ T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\lambda}{v}\ ;\ v = \frac{\lambda}{T}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\ ;\ f = \frac{1}{T}\ ;\ \omega = 2\pi f\ ;\ v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}\ ;\ \text{Desf} = k(x_2 - x_1)rad$$

$$\Psi = A\mathrm{sen}\left(kx - \frac{2\pi v}{\lambda}t\right) = A\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

$$v(x,t) = A\omega\cos\left(\omega t - kx\right)\ ;\ a(x,t) = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

$\frac{d\psi}{dx} = K\cdot A\cos(kx - \omega t)$: max. pend de c/ elem de la onda

Superposición ondas armónicas

$$\Psi_1(\vec{r},t) = A_1\cos(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t)$$

$$\Psi_2(\vec{r},t) = A_2\cos(\vec{k}_2\vec{r} - \omega_2 t)$$

$$\Psi_R = \Psi_1 + \Psi_2; \quad \mathrm{I} \approx A^2$$

$$1)\ \omega_1 = \omega_2; \quad k_1 = k_2$$

$$A_R = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} - 2A_1A_2\cos\left[k(r_2 - r_1)\right]}$$

$A_{R\ \max} \rightarrow \cos = 1 \rightarrow r_1 - r_2 = n\lambda$: constructiva

$A_{R\ \min} \rightarrow \cos = -1 \rightarrow r_1 - r_2 = (2n-1)\frac{\lambda}{2}$: destructiva

$$2)\ \omega_1 \approx \omega_2; \quad k_1 \sim k_2; \quad k_1 > k_2; \quad A_1 = A_2$$

$\Psi_R = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\mathrm{sen}(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$: 2Acos:modulad, sen:portad

$$\text{donde: } \Delta k = k_a - k_b \qquad \Delta\omega = \omega_a - \omega_b$$

$$\bar{k} = \frac{k_a + k_b}{2} \qquad \bar{\omega} = \frac{\omega_a + \omega_b}{2}$$

y cada parte representa una onda:

$$\lambda 1^a = \lambda_g = \frac{4\pi}{\Delta k}; \qquad \lambda 2^a = \bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\bar{k}}$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}; \qquad v = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

$v_g = v \rightarrow$ medio no dispersivo $\rightarrow$ la onda mantiene la forma

$v_g = vf(k) + kdvf(k); = 0 \rightarrow$ no disper. $\neq 0 \rightarrow$ dispers

Energía

$E \sim A^2 f^2$; $I_{3D} = \frac{P_m}{s} = \left[\frac{W}{m^2}\right] = \left[\frac{J}{s\cdot m^2}\right]$ $P_m =$ potencia media, $S =$ superficie

$\rho_{en} = \frac{E_m}{long}$ = densidad de energía 1-D; E_m = energía media

$\rho_{en} = \frac{E_m}{superf}$ = densidad de energía 2-D

$I = \rho_{en} v_g$; si la onda no es plana, I disminuye con la distancia

O. esféricas: $I = \frac{P}{4\pi r^2}$; $A \approx 1/r$

O. cilíndricas: $I = \frac{P}{2\pi r h}$; $A \approx 1/\sqrt{r}$

O. planas: $I = \frac{P}{S} = $ Cte; $A = $ Cte

Ondas en cuerdas

masa m, long L, tension F, densidad D, μ dens. lineal

$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{4F}{f\pi D^2}}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m\partial^2 y}{FL\partial t^2}$; $\frac{1}{v^2} = \frac{m}{FL}$; $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{LF}{m}}$

$\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu\Delta s\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$; $\rho_{EC} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

$\Delta U_{pot} = \frac{1}{2}F\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \Delta x$; $\rho_U = \frac{1}{2}F(\Delta x)\Delta t^2$

$\rho_T = \rho_{EC} + \rho_U = \mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ ó $F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$; $\overline{\rho}_{en} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2$

$I = \mu v\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$; $\overline{I} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2$; $\overline{\rho}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \rho(t)dt$

Ondas estacionarias

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_1 = A\cos(kx-\omega t)\\ \Psi_2 = A\cos(kx+\omega t)\end{array}\right\} \Psi_R = 2A\cos kx\cos\omega t$$

nodos: $A = 0 \rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$; vientres: A_{max} : $x = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$; $\lambda_1 =$ Arc.Fund; $L = \frac{n\lambda}{2}$; $f_n = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\cdot\frac{n}{2L}$

TERMODINÁMICA

$0^o C = 273K$; $1l = 1dm^3$; $1atm = 101300Pa = 760mmHG$

$1bar = 100000Pa$; $1cal = 4,18J$; $1J = 0,24cal$

Dilatación sólidos

Dilatación lineal: $L_1 = L_0(1+\alpha\Delta T)$; $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$

$\alpha =$ coef dilat lineal ≈ 1 ó $2\cdot 10^{-5}\,{}^oC^{-1}$; $\beta = 2\alpha$; $\gamma = 3\alpha$

$\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{dL}{dt}$ (αcte); $\alpha = L_t - L_0 = \int_0^t \alpha dt$ $(\alpha\, no\, cte)$

Dilatación superficial: $S_1 = S_0(1+\beta\Delta T)$; $\Delta s = \beta S_0 \Delta T$

Dilatación volúmica: $V_1 = V_0(1+\gamma\Delta T)$; $\Delta v = \gamma V_0 \Delta T$

Dilatación líquidos

$\Delta V = V_0\beta\Delta T$; $\beta =$ coef de dilat volúmica

$\rho = \frac{m}{v}$; $\rho_T = \frac{\rho_0}{1+\gamma t}$

$\rho_0 = \frac{m}{V_0}$; $\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{m}{V_0(1+\gamma\Delta T)} = \frac{\rho_0}{(1+\gamma\Delta T)}$

Capacidad calorífica

En sólidos y líquidos: $Q = m\cdot C_E \cdot\Delta T$

$C_p \approx C_V$; $C_p = C_E$ a volumen cte; $C_{E\,CTE} =$ (J/Kg·ºK)

$C_{E\,NO\,CTE} = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$; $MAYER: C_p - C_v = R$

En gases: $Q = n\cdot C_m \Delta T$; n : nº moles; $C_m = C_E$ molar.

$C_p \neq C_V$; $C_p > C_V$; $C_p = C_v + R$; $R = (1.45)$

En los cambios de estado: T_{cte}; $Q = m\cdot L$; $L =$ Calor latente (J/Kg)

Transferencia de calor

a)Conducción $\rightarrow$ solo solidos

$H = -kA\frac{\Delta T}{l}$; H = calor/ud. tiempo; k = conduc. termica

$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dx} = -kA\nabla T$; $\dot{Q} = [Watio] = \frac{Q}{t} = \frac{dQ}{dt}$

(J/s·m·ºK); A = sección ; l = longitud

$k = -\frac{Hl}{A\cdot\Delta T}$; $1cal = 4,18J$; $1J = 0,24cal$

b)Radiación $\rightarrow$ todo cuerpo con T(ºK) > 0 irradia energía

$H_e = e\sigma A T_C^4 \rightarrow$ Ley Stephan-Boltzman

$$\left.\begin{array}{l}H_e = e\sigma A T_C^4\\ H_a = a\sigma A T_0^4\end{array}\right\}\text{Eq: } T_C = T_0 \Rightarrow e = a; \left.\begin{array}{l}e = \text{emisividad}\\ a = \text{absorvidad}\end{array}\right\} 0<e|a<1$$

$e =$ factor de forma. Cuerpo negro 1.

$\sigma =$ cte de Stephan=$5,6704\cdot 10^{-8}$W/(m^{2}K^4) A=area de radiación

c) Conveccion

$\dot{q} = \dot{m}Q = \frac{m}{t}Q = m\dot{Q}$

Principios de la termodinámica:

EC de estado de un gas ideal: $pv = nRT$; $R = (1.45)$

$F = p\cdot A$; $dW = p\cdot A\,dx \Rightarrow W_{1\rightarrow 2} = \int_{V1}^{V2} pdv$

$R = 0,082\frac{atm\cdot l}{mol}$; $R = 8,31\frac{Pa\cdot m^3}{K\cdot mol} = \frac{J}{K\cdot mol}$

Procesos:

$dU = dQ - dW \rightarrow$ 1º Pcpo. Termodin

$Q+ : \Delta U+; Q- : \Delta U-; W+ : \Delta-; W- : \Delta+$

$W+$: el sistema realiza W; $W-$: el sistema recibe W

- Sis.Aislado: $Q = 0; W = 0;$ $\Delta U = 0 \rightarrow V = cte$
- Proc. Ciclico: Si se vuelve al mismo punto sin influir el camino; $W > 0$ (sent. horario); $W < 0$ (sent. antihorario)
- Isotermo (t_{cte}): $pv = cte$; $pv = nRT$; $p_1 v_1 = p_2 v_2$

$$W = \int_{V1}^{V2} P\cdot dv = \int_{V1}^{V2}\frac{nRT}{V}dV = nRT_0 Ln\frac{V_2}{V_1}\left\}\begin{array}{l}v_2 > v_1\, W+\\ v_2 < v_1\, W-\end{array}\right.$$

$Q = W$; $\Delta U = 0$

- Isócoro: v_{cte}; $W = 0$; $Q = nC_v\Delta T = \Delta U$
- Isóbaro: p_{cte}; $W = p\Delta v$; $Q = nC_p\Delta T = m\cdot C\cdot\Delta T$

$\Delta U = nC_p\Delta T - p\Delta v$

- Adiabático: $pv^\gamma = cte$; $T\cdot v^{\gamma-1} = cte$; $p^{1-\gamma}T^\gamma = cte$

$\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1$; $\gamma = \frac{C_v + R}{C_v} = \frac{\upsilon+2}{\upsilon}$; $\Delta U = -\frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma - 1}$

$Q = 0$; $C_V = \frac{R}{1-\gamma}$; $dU = -dW$; $\gamma_{mon} = 1,6$; $\gamma_{dia} = 1,4$

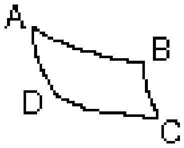
$W = P_1 V_1^\gamma \int_{V1}^{V2}\frac{1}{V^\gamma}dV = \frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma - 1} = n\cdot C_v\Delta T$

Maquinas térmicas:

$\eta = \frac{|W|}{|Q_c|}$; η = rendimiento; $W = W$ a obtener; $Q_c = Q$ dado

$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|}$; $|Q_c| = |Q_f| + |W|$

Karnaugh:



$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$; $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$

$|Q_c| = nRT_c \ln\frac{V_B}{V_A}$; $|Q_f| = nRT_f \ln\frac{V_C}{V_D}$

AB:Exp isoterma BC:Exp. adiabatica

CD: Comp. isoterma DA: Comp. adiabatica

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES:

Presión que ejerrce un gas en las paredes de un cubo

$$p = \frac{m}{V} N \frac{\overline{V^2}}{3}; \quad N = \frac{n(moles)}{V}; n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{P_m}$$

$$V_{cm} = \sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \ k = \frac{R}{N_A}$$; R=8,3144J/(K·mol)

$$pv = nRT = \frac{N}{N_A} RT = nkT$$

Equipartición de la energía:

Energía interna de un gas $= \mathrm{U}$

$$U = \upsilon\left(\frac{1}{2} NkT\right); \ \upsilon = g.libertad.$$

$$\frac{U}{N} = \upsilon\left(\frac{1}{2} kT\right) = U$$ (de 1 molecula)

G.L.: Gas Ideal	υ	C_V	C_P	γ
Monoatom	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$5/3$
Diatom	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$7/5$
Diatom ↑↑ Tª	7	$\frac{7}{2}R$	$\frac{9}{2}R$	$9/7$

Solidos (cristales): $\upsilon = 6$; $C_E = 3R$

Distribucion de velocidades de Maxwell-Boltzman:

$$f(v) = 4\pi N \left[\frac{m}{2\pi kT}\right]^{3/2} \cdot v^2 e^{\frac{mv^2}{2kT}}$$

SONIDO:

$$\psi(x,t) = A_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \ ; \ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\Delta p(x,t) = p(x,t) - p_{atm}$$

$$\Delta p(x,t) = \Delta p_{\max} \cdot \mathrm{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$

$\Delta p = -B\frac{\partial\psi}{\partial x}$; $\Delta p_{\max} = B \cdot A_0 \cdot k$; $B =$ coef. compresib

$c_{aire} = \sqrt{\frac{B_s}{\rho}}$; $B = \rho \cdot c^2$; $\rho =$ dens. media aire; $c =$ velocidad

$c_{gas\,ideal} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{P_m}} = c_{gas\,ideal}$ (Tª) (xa proc. adiab)

$$B = -V\frac{dp}{dV}$$

Energía e intensidad:

$$p = \frac{dW}{dt} = -A \cdot B \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} = A\,B\,A_0^2\,k\,\omega \cdot \cos^2 k(x - \omega t)$$

$p = A \cdot c^2 \cdot \rho \cdot A_0^2\,k\,\omega \cdot \cos^2 k(x - \omega t)$; $I = \frac{P}{A}$;

$$I = B \cdot A_0^2 \cdot k\,\omega \cdot \cos^2 k(x - \omega t) \ ; \bar{I} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{1}{2} B\,A_0^2\,k\,\omega = \frac{\Delta p_{\max}^2}{2 \cdot c \cdot \rho}$$

$\beta(dB) = 10\log\frac{I}{I_0}$; Umbral Audicion: $10^{12}\,W/m^2 \ \square\ 0dB$

Umbral Dolor: $1\,\mathrm{W/m^2} \ \square\ 120dB$

Análisis de Fourier:

$f(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot \mathrm{sen}(2\pi \cdot \upsilon_n \cdot t)$; $\upsilon_n =$ armonico fundamental

Ondas estacionarias o resonancias:

a) tubo abierto por los 2 extremos (ambos antinodos)

$$L = n\frac{\lambda}{2} \ ; \ \lambda_n = \frac{2L}{n} \ ; \ \upsilon_n = c \cdot \frac{n}{2L} = \sqrt{\frac{B_s}{\rho}}\frac{n}{2L} = n\,\upsilon_1$$

Gases ideales: $\upsilon_n = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \cdot \frac{n}{2L}$; $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda\,\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{c}{\lambda}$

$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$; Distancia entre 2 nodos | antinodos= $\lambda/2$

Las 2 1as ondas son: λ=2L y λ=L

b) Tubo abierto por un lado (abierto:antinodo, cerrado:nodo);

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \ ; \ \lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \ ; \ \upsilon_n = \frac{c}{\lambda_n}$$

$$\upsilon_n = c \cdot \frac{(2n.1)}{4L} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \cdot \frac{(2n-1)}{4L} = (2n-1)\upsilon_1$$

Las 2 1as ondas son: λ=4L y $\lambda = \frac{4}{3}L$

c) Tubo cerrado por los 2 extremos (ambos nodos)=caso a)

Batidos:

Dadas 2 ondas parecidas:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= A \cdot \mathrm{sen}(k_1 x - \omega_1 t) \\ \psi_2 &= A \cdot \mathrm{sen}(k_2 x - \omega_2 t) \end{aligned}\right\} \sum = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cdot \mathrm{sen}(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

$$\Delta k = k_1 - k_2 \approx 0 \Rightarrow \Delta\lambda \uparrow\uparrow \ ; \ \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \approx 0 \Rightarrow \Delta T \uparrow\uparrow$$

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \approx k \ ; \ \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega$$

$$T_{bat} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \ ; \ \upsilon_{bat} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = |\upsilon_1 - \upsilon_2|$$

Efecto Doppler:

$\upsilon_e =$ frec. emisor; $c_e =$ vel. emisor ; $T_e = 1/\upsilon_e$

$\upsilon_o =$ frec. observador; $c_o =$ vel. observador ; $T_o = 1/\upsilon_o$

$c =$ vel. sonido;

a) estudiando al emisor: $\lambda = (c - c_e) \cdot T_e$

b) estudiando al observador: $\lambda = (c - c_o) \cdot T_o$

$$\upsilon_o = \upsilon_e \frac{c \pm c_o}{c \pm c_e}; \ \begin{aligned} &o \to\to e \tfrac{-}{-} \ ; o \leftarrow\leftarrow e \tfrac{+}{+} \\ &o \to\leftarrow e \tfrac{+}{-} \ ; \ o \leftarrow\to \tfrac{-}{+} \end{aligned}$$

$c_e < c \rightarrow$ si no se cumple no hay doppler; ($c_e \approx c \rightarrow$ mach)

Doppler para la luz: $\upsilon_o = \upsilon_e \left(\frac{c - c_r}{c + c_r}\right)^{\frac{1}{2}}$

$c_R =$ vel. relativa entre *e* y *o*. >0 se acercan, <0 se alejan

FÍSICA CUANTICA:

Radiación del cuerpo negro:

Radiancia espectral: $[R_T(\upsilon)] = \left(\dfrac{J}{s\cdot m^2\cdot Hz}\right)$

$I = \int_{0Hz}^{\infty} R_T(\upsilon)d\upsilon = R_T\ ; R_T = \sigma\cdot T^4\ ;\ \sigma = 5{,}6704\cdot 10^{-8} W/(m^2K^4)$

$$\left.\begin{array}{l}\upsilon_{\max} = \dfrac{c}{\lambda_{\max}} \\ \upsilon_{\max} = cte\cdot T\end{array}\right\} \frac{c}{cte} = \lambda_{\max}\cdot T \rightarrow K_W = \lambda_{\max}\cdot T$$

K_W = cte. Wien = $2{,}898\cdot10^{-3} m\cdot K$

Niveles de energia permitidos: $E = n\cdot h\cdot\upsilon$;n=1,2, ;h=Planck=$6{,}626\cdot10^{-34}$ J·s

$R_T(\upsilon) = \dfrac{8\cdot\pi\cdot\upsilon^2}{c^2}\cdot\dfrac{h\,\upsilon}{e^{\frac{h\cdot\upsilon}{K\cdot T}} - 1}$ (K=$1{,}38\cdot10^{-23}$J/K)

Efecto fotoeléctrico:

V_0 = Potencial de frenado; $E = h\cdot\upsilon$ = E. de 1 foton

$E_{foton} = W_0 + E_c\ ; K_{\max} = h\cdot\upsilon - W_0\ ; \upsilon_0 = \dfrac{W_0}{h}\ ; \upsilon = \dfrac{c}{\lambda}$

Si $h\cdot\upsilon < W_0 \Rightarrow$ No hay efecto fotoelectrico

Si $h\cdot\upsilon = W_0 \Rightarrow$ Empieza a aparecer el efecto

Si $h\cdot\upsilon > W_0 \Rightarrow$ Hay efecto y los e$^-$ poseen E_C

$K_{\max} = e\cdot V_0\ ; V_0 = \dfrac{h}{e}\upsilon - \dfrac{W_0}{e}$

Ondas de materia:

Leyes de De Broglie para las ondas de materia:

$E = h\cdot\upsilon\ ;\ p = h/\lambda\quad (p = m\cdot v)$

Pcpo de Incertidumbre de Heisenberg:

$\Delta x\cdot\Delta P_x \geq \dfrac{\hbar}{2}\ ;\ \hbar = \dfrac{h}{2\cdot\pi}\ ;\ \Delta E\cdot\Delta t \geq \dfrac{\hbar}{2}$

Estudio cuántico del átomo:

Bohr: Modelo valido para monoatomicos

$F_{centrif} = F_{electros}\ ;\ m\cdot\dfrac{v^2}{r} = K\dfrac{e^2}{r^2} \rightarrow \dfrac{e^2}{r} = m\,v^2$

Solo son posibles las orbitas en las que:

$$\left.\begin{array}{l}L = n\cdot\hbar \\ L = m\cdot r\cdot v\end{array}\right\} m\cdot r\cdot v = n\cdot\frac{h}{2\cdot\pi}$$

El e$^-$ solo emite radiacion al cambiar de orbita: $E = h\cdot v$

$E = -\dfrac{m\cdot Z^2\cdot e^4}{(4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0)^2\cdot 2\cdot\hbar^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$

Radio de Bohr= $\dfrac{h^2}{\dfrac{1}{\varepsilon_0\cdot\pi\cdot m\cdot e^2}}\ ;\ \varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^9}\ ;\ v = \dfrac{h}{2\pi m r}$

$k = \dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0};\ \upsilon = \dfrac{E_i - E_f}{h}\ ;$

$\dfrac{k(-e)e}{r^2} = \dfrac{mv^2}{r};\ E = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{k(-e)-e}{r}$

Estados de energía atómicos:

Niveles de atomo de H:

$E_n = \dfrac{13{,}6}{n^2}$

Energía de un oscilador:

$E(\upsilon) = \dfrac{h\upsilon}{e^{h\upsilon/kT} - 1}$

Ecuación de Schrödinger:

$-\dfrac{h^2}{8m\pi^2}\dfrac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + v(x)\varphi(x) = E\varphi(x);\quad \varphi(x)$: función de onda

$E = E$ partícula de masa m. ; $v(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$

Pozo de potencial; Potencial en un cristal:

Fzr de atracción entre ion$^+$ y e$^-$ $= \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{x^2}$

$E_{pot} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{x^2};\quad E_n = \dfrac{h^2}{8m_cL^2}n^2; E_n$:E por nivel estado;

a:anchura pozo potencial; n = números cuánticos

$n_e = \dfrac{\rho}{Pm}N_A x;\ \ n_e$: nº e$^-$ libres/ud. V; ρ:densid;

Pm:peso molec; x:cte relaci con la valencia (e$^-$ / átomo)

$E_{\min} = 3E_0;\ \ E_0 = \dfrac{h^2}{8mL^2}$

Los posibles estados de energía se hallan con:

nº$E = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$, siendo n_x los nºs cuánticos. PE $[311]$ es

el $3^2 + 1^2 + 1^2 = 11$, con $6e^-$ (3 combinaciones 311, 131, 113, ·2spin).

La E de los e$^-$ del último estado ocupado es = E$_f$ =

$= \dfrac{h^2}{8m_e}\left(\dfrac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$; n_e = densidad e$^-$ libres.

Si representamos los estados como celdillas en unos ejes 3D,

la E de cada estado es proporcional a su distancia al origen al cuadrado:

$E = E_0(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = E_0 n^2$;

$n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ es la EC de una esfera, luego n = radio esfera.

En 2D: una cuadrícula, donde cada punto = 1 estado (2 e$^-$),

nº estados con $E \leq E^* = E_0 n^{*2}; n^*$ = radio circunf (nº estado).

nº de e$^-$ con E < E* $= 2\dfrac{1}{4}\pi n^{*2}$; En 3D: $\dfrac{\pi n^{*3}}{3}$. $n^* = \sqrt{\dfrac{E^*}{E_0}}$

La posibilidad de que un estado esté ocupado:

función de Fermi-Dirac: $f(E) = \dfrac{1}{e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} + 1}$

Nº de estados con E < E$_f$ = nº de e$^-$ libres $= N_e$

$N_e = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{E_F}{E_0}\right)^{3/2} \Rightarrow E_f = \left(\dfrac{3N_e}{\pi}\right)^{2/3} E_0 = \left(\dfrac{3N_e}{\pi}\right)^{2/3}\dfrac{h^2}{8m}$ (kg)

Densidad de e$^-$ libres:

$n_e = \dfrac{\rho}{p_m}\cdot N_A\cdot x$ ó $n_e = \dfrac{\rho}{P_m}\cdot N_A\ x\ \cdot 10^6$ (cuando ρ = [gr/cm^3] y P_m = [gr/mol])

Distribución de los e$^-$ en un cristal en función de la energía:

$n(E)dE = g(E)dE\cdot f(E)$

$g(E)dE = C\cdot E^{1/2}dE$